

La intervención psicoeducativa en las dificultades de aprendizaje de las matemáticas

Isabel de los Reyes RODRIGUEZ ORTIZ
Universidad de Sevilla

Resumen

En la primera parte se describen las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas relativas a las cuatro dimensiones del proceso de enseñanza-aprendizaje: el *alumno*, con dificultades debido a sus recursos, heurísticos, procesos metacognitivos, creencias y actitudes; el *profesor*, debido a su formación inicial y permanente y a la influencia que tienen sus creencias y actitudes sobre su práctica docente; el *currículum*, que incluye dificultades relativas al contenido, evaluación y metodología; y el *contexto* en el que se desarrolla la enseñanza. En la segunda parte se exponen distintos procedimientos, técnicas y recursos para intervenir sobre las dificultades identificadas en el apartado anterior, haciendo especial énfasis sobre la función que debe cumplir el psicólogo.

Palabras clave: Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, metacognición, creencias y actitudes, metodología y recursos didácticos.

Abstract

The first part of this paper describes mathematics learning disabilities using a four dimensional framework of the teaching-learning process: disabilities referring to the students, which include resources, heuristics, metacognition, beliefs and attitudes; those referring to the teacher's education and the influence of his/her beliefs and attitudes on his/her teaching practices; those referring to the curriculum, which include contents, instructional methods and assessment procedures; and those referring to the context in which the teaching-learning process develops. The second section reviews approaches, techniques and resources developed to face the disabilities identified in the first part. Special emphasis is placed on the role the psychologist must play.

Key words: Mathematics learning disabilities, metacognition, beliefs and attitudes, teaching resources and methods.

Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas

El fracaso escolar en matemáticas es muy frecuente. Esto al menos es lo que se desprende de un estudio de Lapointe, Mead y Phillips (1989, cit. en Rivière, 1990) en el que se afirma que el 43% de los alumnos españoles de 13 años no alcanzan el nivel mínimo de conocimientos y habilidades matemáticas requeridas al finalizar la escolaridad obligatoria. En los últimos años esta situación incluso parece haber empeorado, de tal manera que algunos autores han llegado a plantearse si realmente las matemáticas son tan importantes como para ser obligatorias para todos los niños.

Las razones que se suelen argumentar para que las matemáticas estén presentes a lo largo de la escolaridad obligatoria van desde justificaciones de tipo sociológico, basadas en la exigencia social de conocimientos y destrezas matemáticas, a las justificaciones de índole psicológica, que consideran las matemáticas como un ejercicio del pensamiento que contribuye a la formación integral del individuo en diversos planos (intelectual, instrumental, estético, etc.) (Callejo, 1987). Pero esta contribución de las matemáticas al desarrollo cognitivo y a la formación de los alumnos sólo es tal cuando se dan las condiciones adecuadas en su enseñanza/aprendizaje, de lo contrario, se transforman en una pesadilla para los alumnos y sus profesores; para unos se convierten en sinónimo de confusión, aburrimiento e inutilidad y para los otros en constante motivo de frustración y sensación de fracaso. Esto último parece ser lo que con mayor frecuencia ocurre. Al parecer, el aumento

de las exigencias de habilidades matemáticas de la sociedad actual no es correspondido por un dominio creciente de los conocimientos y habilidades matemáticas por parte de los alumnos (Gómez-Granell, 1994) y no hay acuerdo a la hora de identificar las causas de esta situación. Sin entrar en la polémica de las responsabilidades, la repuesta educativa que debe darse a esta situación pasa por la mejora de la calidad de la enseñanza de las matemáticas y es aquí donde el psicólogo puede jugar un importante papel, asesorando y apoyando las decisiones que los educadores deben tomar en el desempeño de su trabajo diario (Baroody, 1988).

Para tomar decisiones eficaces los educadores deben comprender cómo los niños aprenden las matemáticas. El psicólogo puede contribuir con sus conocimientos a que el profesorado tome en consideración, a la hora de planificar el proceso de enseñanza/aprendizaje y de evaluar los progresos obtenidos, las posibilidades de los alumnos en un momento dado y los factores afectivos y motivacionales que pueden influir en su aprendizaje. La intervención del psicólogo en este área curricular debe orientarse por los mismos objetivos que guían la enseñanza de las matemáticas y que, según los Decretos 105/1992 y 106/1992 (BOJA nº56, 20 de junio), en Andalucía son los que aparecen en la tabla 1.

De este listado merece la pena destacar el énfasis que se hace sobre determinados aspectos de gran interés para orientar, en su caso, la intervención psicopedagógica:

- La promoción de un conocimiento funcional que permita al alumno

Tabla 1. Objetivos de la enseñanza de las matemáticas en los niveles obligatorios de la enseñanza en Andalucía (según los Decretos 105/1992 y 106/1992 de la Consejería de Educación y Ciencia).

Educación Primaria

La enseñanza de las matemáticas tendrá como objetivo contribuir a desarrollar, en los alumnos y alumnas, las siguientes capacidades:

1. Utilizar los códigos y conocimientos matemáticos para apreciar, interpretar y producir informaciones sobre hechos o fenómenos conocidos, susceptibles de ser matematizados.
2. Identificar, analizar y resolver situaciones y problemas de su medio, para cuyo tratamiento se requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, la utilización de fórmulas sencillas y la realización de los algoritmos correspondientes.
3. Utilizar instrumentos sencillos de cálculo y medida, decidiendo en cada caso, sobre la posible pertinencia y ventajas que implica su uso y sometiendo los resultados a una revisión sistemática.
4. Elaborar estrategias personales de estimación, de cálculo y de orientación en el espacio y aplicarlas a la resolución de problemas sencillos.
5. Identificar formas geométricas en su entorno inmediato, utilizando el conocimiento de sus elementos y propiedades para incrementar su comprensión y desarrollar nuevas posibilidades de acción en dicho entorno.
6. Utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones de su entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.
7. Apreciar la importancia de la actividad matemática en la vida cotidiana, disfrutar con su uso y desarrollar actividades y hábitos de confianza, perseverancia, orden, precisión, sistematicidad,...
8. Identificar en la vida cotidiana situaciones y problemas susceptibles de ser analizados con la ayuda de códigos y sistemas de numeración, utilizando las propiedades y características de éstos para lograr una mejor comprensión y resolución de dichos problemas.
9. Comprender y valorar las nociones matemáticas básicas, establecer las oportunas relaciones entre ellos y utilizar adecuadamente los términos, convenciones y notaciones más usuales.

Educación Secundaria Obligatoria

La enseñanza de las matemáticas se orientará a facilitar los aprendizajes necesarios para desarrollar, en los alumnos y alumnas, las siguientes capacidades:

1. Utilizar el conocimiento matemático para organizar, interpretar e intervenir en diversas situaciones de «la realidad».
2. Comprender e interpretar distintas formas de expresión matemática e incorporarlas al lenguaje y a los modos de argumentación habituales.
3. Reconocer y plantear situaciones en las que existen problemas susceptibles de ser formulados en términos matemáticos, resolverlos y analizar los resultados utilizando los recursos apropiados.
4. Reflexionar sobre las propias estrategias utilizadas en las actividades matemáticas.
5. Incorporar hábitos y actitudes propios de la actividad matemática.
6. Reconocer el papel de los recursos en el propio aprendizaje.

adaptarse a las demandas matemáticas de una sociedad caracterizada por sus continuos avances. Para ello es preciso fomentar un uso crítico de los recursos matemáticos adquiridos por los alumnos a lo largo de la escolaridad.

- La pretensión de que los alumnos conciban las matemáticas como un instrumento útil para comprender mejor su entorno, como un medio de comunicación y representación de la realidad, como un recurso para resolver los problemas que la vida nos plantea a diario, etc. Y de esta manera, ir creando una actitud positiva hacia las matemáticas.
- La promoción del conocimiento y la valoración de la propia capacidad para resolver problemas matemáticos, centrar la atención en el proceso que se sigue en una determinada actividad matemática y en el análisis de las estrategias puestas en juego más que en el resultado final. Así los errores deben pasar a ser considerados, tanto por el alumno como por el profesor, como experiencias de aprendizaje y no como fracasos.
- El fomento del uso de los recursos habituales en la sociedad: prensa, televisión, vídeo, ordenadores, calculadoras, etc. como medios que facilitan el aprendizaje de las matemáticas y, a la vez, son fuentes de nuevos problemas y nuevas formas de abordaje matemático.

Un enfoque tradicional de las dificultades en el área de matemáticas es aquel que sólo recoge aquellas dificultades relacionadas con el alumno y, en concreto, referidas a sus destrezas en el

cálculo y a su comprensión de los conceptos matemáticos (Gagnè, 1991). Los primeros intentos de describir estas dificultades se concretan en listados de síntomas como el que muestra la tabla 2.

Estos listados han servido de muy poco a la hora de articular una respuesta educativa frente a estas dificultades, ya que sólo analizan procesos mecánicos implicados en una tarea determinada, quedándose en la superficie de los problemas, con lo cual la solución que proponen consiste, muchas veces, en repetir los ejercicios una y otra vez hasta que las operaciones se ejecutan correctamente.

Las aportaciones más recientes desde la psicología cognitiva han supuesto un paso importante a la hora de identificar las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, puesto que proporcionan pistas sobre las razones cognitivas de los errores y sobre su posible corrección. Sin embargo, aún es necesario un análisis *más global* del contexto de enseñanza/aprendizaje, que contemple las interrelaciones entre todos sus elementos (agente educativo, persona que aprende, la propia disciplina y el entorno socio-cultural de la acción educativa) y, a la vez, se requiere un análisis *más minucioso* de los problemas relacionados con la ejecución del alumno, no centrado sin más en sus dificultades, sino útil para investigar el conocimiento (en sentido amplio) que subyace a dichas dificultades y analizar además la capacidad que tienen los alumnos para comprender las razones de sus errores y las habilidades que ponen en práctica para poder superarlos.

Siguiendo esta última propuesta, podemos identificar cuatro grupos de

Tabla 2. Listados de identificación de algunas dificultades de aprendizaje de las matemáticas.

Dificultades de aprendizaje de las matemáticas en educación primaria (Gagnè, 1991)

En la suma:

- Contar en lugar de sumar.
- Olvidarse de añadir el número que se «lleva».
- Equivocar el número que se «lleva».

En la resta:

- No sumar 10 a la cifra del minuendo inferior a su correspondiente en el substraendo, disminuyendo en 1 la inmediata a su izquierda.
- Errores debidos a ceros en el minuendo.
- Restar el minuendo del substraendo.

En la multiplicación:

- Errores en la utilización de las tablas.
- Errores en la colocación de productos parciales.

En la división:

- Errores de resta y multiplicación.
- Hallar un resto superior al divisor.

Dificultades de aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria (Martínez y Paradís, 1982):

- Conocimiento incorrecto del concepto de función.
- Incorrecta formalización de los conjuntos, relaciones y estructuras.
- Fallos en los automatismos del cálculo con números racionales y radicales.

dificultades en el aprendizaje de las matemáticas que se corresponden con los cuatro elementos integrantes del proceso de enseñanza/aprendizaje: relacionadas con el alumno, relacionadas con el profesor, relacionadas con el currículum y relacionadas con el contexto. Vamos a tratar cada una de ellas detalladamente.

Dificultades de aprendizaje de las matemáticas relacionadas con las características del alumno

Schoenfeld (1985, cit. en Brady, 1991) identifica cuatro dimensiones en las que pueden presentarse las dificultades de los alumnos en relación a la resolución de problemas matemáticos: los recursos, los heurísticos, los procesos metacognitivos y las creencias y actitu-

des. Estas dimensiones nos van a servir para estructurar las necesidades de los alumnos en cuanto al aprendizaje en este área.

El dominio de los recursos. Hace referencia al conocimiento de conceptos y métodos matemáticos que el alumno usa en un momento dado, así como a los prerrequisitos necesarios para realizar una determinada tarea matemática. Este conocimiento depende de la historia de aprendizaje matemático del alumno (qué matemáticas ha aprendido y cómo han sido estudiadas), lo que a su vez depende de sus características individuales, de su estilo de aprendizaje, del material usado, de las expectativas y de las estrategias de enseñanza del profesor (Brady, 1991). Las dificultades más fre-

cuentas de los alumnos en relación a los recursos son:

- Como consecuencia de cómo aprendió los conocimientos que posee, no sabe cuándo aplicarlos, o generaliza de manera incorrecta los procedimientos que ya domina; por ejemplo, cuando ya sabe sumar quebrados utiliza el mismo procedimiento (sumar los numeradores y conservar el mismo denominador) para dividir fracciones (Callejo, 1987).
- No utiliza los conocimientos que posee a la hora de interpretar las respuestas que da a las situaciones problemáticas, por ejemplo cuando obtiene resultados disparatados, como que la longitud de un lápiz es de 1.325 metros, y no se da cuenta de que ha cometido un error en los cálculos (Macnab y Cummine, 1992).
- Domina unos determinados recursos matemáticos pero sólo los emplea en problemas que los demandan explícitamente. Realmente no es capaz de apreciar la utilidad de dichos recursos ni sabe aplicarlos fuera del marco escolar, por tanto, carece de la autonomía intelectual necesaria para enfrentarse a problemas matemáticos nuevos, distintos a los modelos aprendidos en la escuela.
- Tiene dificultades a la hora de comprender los textos matemáticos debido a un deficiente conocimiento lingüístico y semántico (Mayer, 1991) o una deficiente comprensión lectora de dichos textos, que difieren de los de humanidades en cuanto a su estructura y exigencias de comprensión (Callejo, 1987). De hecho, las

dificultades del alumno se acentúan cuando aparecen enunciados que expresan una relación numérica entre variables, por ejemplo: «Ana tiene tres canicas menos que Andrés» (Mayer, 1991). Según Macnab y Cummine (1992) las dificultades que presenta la lectura de los textos matemáticos pueden ser de cuatro tipos: dificultades debidas a la complejidad sintáctica de la lengua utilizada, dificultades debidas a la utilización de vocabulario técnico, dificultades causadas por la utilización de notación matemática y dificultades debidas a la incapacidad de relacionar las matemáticas con el contexto (Macnab y Cummine, 1992).

- Tiene dificultades relativas a su conocimiento procedimental, es decir, conocimiento de cómo ejecutar una secuencia de operaciones, tales como dividir números decimales, o como multiplicar un entero y un decimal (Mayer, 1991). En ocasiones se producen interferencias entre los procedimientos adquiridos previamente y los nuevos procedimientos que se aprenden, por ejemplo, cuando al alumno que sabía sumar decimales se le enseña a multiplicarlos, tras el nuevo aprendizaje separa en la suma total tantos decimales como tienen los sumandos (Callejo, 1987).

El manejo de los heurísticos. Son estrategias generales de resolución de problemas, carentes de contenido matemático específico y que no aseguran la solución, pero aumentan las posibilidades de alcanzarla (De Corte, 1993), por ejemplo, trabajar hacia atrás, verificar resultados, descomponer una tarea en

partes más asequibles, etc. Las dificultades que aparecen en los alumnos en relación a su repertorio de heurísticos se deben sobre todo a las prácticas educativas. Los heurísticos no se suelen enseñar explícitamente a los alumnos sino que éstos se limitan a observar los que aparecen en sus libros o los que usan sus profesores, sin que en ninguno de los dos casos se haga una referencia clara a su utilidad y aplicabilidad.

Los procesos metacognitivos o de autorregulación. Se refieren al conocimiento y control sobre los propios procesos cognitivos, a la capacidad de planificar nuestra actuación, de ejecutar dicho plan, controlando el proceso, evaluarlo para detectar posibles errores y, en función de éstos, adaptar la propia actuación. La metacognición constituye un aspecto del pensamiento crítico que hace referencia a la capacidad del alumno para desarrollar una estrategia sistemática durante la resolución de problemas y para evaluar su eficacia (Cardelle-Elawar, 1992b), de manera que estos procesos de autorregulación son los responsables de que los alumnos tengan conciencia de su conocimiento de los heurísticos, del porqué, dónde y cómo utilizarlos. Las dificultades relacionadas con los procesos metacognitivos se ponen de manifiesto cuando el alumno:

- No percibe cuáles de los recursos de que dispone son los apropiados para afrontar una determinada tarea o ni siquiera es consciente de la posibilidad de usar tales recursos.
- Se muestra inflexible a la hora de abandonar un determinado punto de vista que no le está llevando a la

solución de un problema o no le permite contemplar una situación desde otros ángulos y no busca alternativas. O una vez que ha encontrado una vía de solución o un determinado enfoque de una situación no examina otras posibilidades.

- No pone en juego destrezas de estimación que le permita comprobar las soluciones a las que llega y, así, poder cambiar sus estrategias en caso de que las soluciones obtenidas por medio de la estimación y por medio del cálculo no coincidan. Ni intenta comprobar sus hipótesis cuando existe el riesgo de que su intuición entre en conflicto con la lógica matemática, por ejemplo, al resolver la expresión $(a+b)^2$ como a^2+b^2 (Callejo, 1987).
- Sabe realizar una operación con números pero no sabe explicar el procedimiento empleado o, cuando se equivoca, necesita ayuda para comprender porqué su respuesta es errónea (Cardelle-Elawar, 1992b).
- Lee el enunciado de un problema rápidamente y, enseguida, se dispone a hallar la solución sin una reflexión previa sobre cuál es la demanda del problema y poniendo en práctica algún automatismo adquirido previamente, sin prestar atención a su adecuación al caso concreto.

También el empleo de los procesos metacognitivos en relación con las matemáticas está muy relacionado con las prácticas educativas que se llevan a cabo en las aulas. Así, en las escuelas los alumnos rara vez tienen ocasión de observar cómo otros se autorregulan al enfrentarse con situaciones desconocidas

o más difíciles; los ejemplos que aparecen en los libros de textos no suelen dar pistas sobre cómo se ha desarrollado un determinado razonamiento y las explicaciones que dan los profesores de los problemas tampoco comunican a sus alumnos la reflexión metacognitiva que subyace al proceso de resolución. Por otro lado, la retroalimentación que suele darse a los alumnos cuando éstos se equivocan suele adoptar la forma de sanciones externas que no favorecen que el alumno se autoevalúe y se dé cuenta de en qué momento de todo el proceso ha podido tomar una decisión inadecuada.

Las creencias, actitudes, emociones y motivación de los alumnos. Son aspectos que se reconocen como poderosamente influyentes en la ejecución matemática (Garofalo, 1989). Se considera que el contexto en el que las matemáticas se enseñan afecta, en gran medida, a la representación que los alumnos se

construyen de las mismas. Las actitudes son los sentimientos que los alumnos construyen en su relación con la materia e incluyen su grado de disfrute con las matemáticas, la seguridad al estudiarlas y el reconocimiento de su utilidad tanto para resolver problemas de la vida diaria como para la formación integral de uno mismo (Callejo, 1987). Las creencias incluyen las ideas del alumno sobre la naturaleza de las matemáticas, su facilidad y aprendizaje, y sobre su propia capacidad para entender, aprender y usar las matemáticas. Schoenfeld (1985) y Lester (1983) (cits. en Mayer, 1991) han identificado una serie de creencias frecuentes e incompatibles con el aprendizaje matemático (ver tabla 3).

Todas estas creencias influyen tanto en las actitudes como en la ejecución matemática (Cockroft, 1985, cit. en Callejo, 1987; Garofalo, 1989) e incluso en aspectos tan puntuales de ésta como la elección de estrategias de resolución que se aplican (Mayer, 1991). Así por

Tabla 3. Creencias incompatibles con el aprendizaje matemático (Lester, 1983 y Schoenfeld, 1985, citados por Mayer, 1991).

- Las matemáticas son operaciones y como tales sólo exigen seguir reglas y memorizar.
- Los problemas matemáticos deben ser resueltos rápidamente y en pocos pasos.
- Sólo los genios pueden crear matemáticas.
- En los problemas, el tamaño de los números es un criterio a tener en cuenta más importante que su significado.
- El papel del estudiante de matemáticas es recibir conocimientos y el del profesor es transmitirlos.
- Los estudiantes demuestran su conocimiento a través del número de respuestas correctas.
- Los problemas matemáticos se resuelven aplicando una o más operaciones.
- Las palabras «claves» del problema determinan las operaciones que hay que aplicar.
- Las matemáticas formales tienen poco o nada que ver con la resolución real de problemas prácticos.
- Las matemáticas no tienen utilidad en la vida cotidiana.
- Para llegar a ser un buen solucionador de problemas matemáticos hay que tener determinada inteligencia, si careces de esa inteligencia no importa cuánto te esfuerces, porque no tendrás verdadero éxito en la resolución de problemas matemáticos.

ejemplo, si un alumno cree que las matemáticas formales no tienen nada que ver con la resolución de problemas matemáticos, no recurrirá a ellas cuando se enfrente a problemas que requieran su uso; si piensa que los problemas matemáticos se resuelven siempre en menos de diez minutos, dejará por imposible un problema que no consiga resolver en ese tiempo; si cree que sólo los genios pueden crear y descubrir las matemáticas, cuando se olvide de un paso en el procedimiento para resolver un problema, abandonará porque se creará incapaz de deducirlo por él mismo, es decir, aceptará los procedimientos que se le enseñe pero no intentará comprender cómo funcionan; si piensa que las matemáticas no tienen ninguna utilidad fuera de la escuela, difícilmente estará motivado a aprender a resolver problemas; si cree que resolver bien un problema depende de lo inteligente que sea uno, utilizará esto como excusa para ni siquiera intentarlo o, tras un fracaso, dejará de insistir en un problema porque así podrá atribuir el fracaso a la falta de esfuerzo antes que reconocer la falta de habilidad; o si aplica las operaciones en función de las palabras «claves» del problema, fracasará a la hora de encontrar las operaciones apropiadas en aquellos problemas que Mayer (1991) llama «inconsistentes», es decir, donde la palabra «clave» es contraria a la operación aritmética correcta (por ejemplo: «Si un lechero vende leche a 150 pts./litro, 15 pts./litro *menos* que el tendero. ¿Cuánto cuestan 5 litros de leche compradas al tendero?»).

Las creencias y actitudes tienen su origen tanto en el contexto escolar como en el medio socio-cultural más amplio que, a través de los medios de comuni-

cación, los padres, los amigos, etc., transmite una imagen de las matemáticas como asignatura terriblemente difícil, complicada y sin apenas utilidad y una imagen del profesor de matemáticas como una persona «airada, sarcástica e impaciente» (Macnab y Cummine, 1993, p.26). Todo ello incide en la motivación con que los alumnos se enfrentan a las matemáticas escolares. Se han realizado distintos estudios con objeto de descubrir las relaciones entre las actitudes de los padres hacia las matemáticas y las actitudes y el rendimiento matemático de sus hijos, algunos de ellos encuentran correlaciones positivas entre estas variables mientras que otros o no encuentran relación o la que descubren resulta ser muy baja (Quiles, 1993). Sin embargo no podemos olvidar que la motivación de los alumnos hacia las matemáticas también depende del contenido y cómo se imparte, así como del repertorio de destrezas y conocimientos con que el alumno se enfrenta a una tarea determinada.

Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas relacionadas con el profesor

Vivimos en una época de reforma educativa, por ello el psicólogo escolar debe estar atento a los condicionantes del cambio educativo que pueden dificultar dicha reforma y a su vez impedir que el psicólogo realice sus funciones de forma adecuada. Entre esos condicionantes nos encontramos con las dificultades relativas a la formación (inicial y permanente) del profesorado y a sus creencias y actitudes hacia las matemáticas y hacia la función del psicólogo en el sistema educativo.

La formación del profesorado de matemáticas. El que los objetivos educativos relativos a las matemáticas se lleven a la práctica va a depender mucho de las creencias y actitudes de los profesores y del desarrollo de nuevas habilidades y destrezas para la enseñanza. Por ello, la formación inicial y permanente de los profesores juega un papel fundamental.

Respecto a la *formación inicial*, y sobre todo en el caso de los profesores de secundaria, ésta parece dividirse en: formación en conocimientos matemáticos, recibida en la facultad correspondiente, y formación en didáctica de las matemáticas, recibida a través del curso para la obtención del *Certificado de Aptitud Pedagógica* (CAP). Esta separación da lugar a que se le exija a los profesores de matemáticas que pongan en práctica, a la hora de enseñar, una serie de destrezas que con frecuencia nunca han tenido la oportunidad de experimentar ni de observar cómo otros las utilizan para explicarles determinados conocimientos (Llorente, 1982).

Debido a las nuevas exigencias que la LOGSE plantea a los profesores y maestros se hace necesario que éstos reciban una formación de carácter continuado o *formación permanente*, con una orientación eminentemente práctica, que les proporcione los conocimientos necesarios sobre psicología de la educación, sobre el contexto en el que se enseñan las matemáticas, sobre la enseñanza y aprendizaje de las mismas, sobre la utilización y creación de recursos didácticos, sobre evaluación de las habilidades de los alumnos, etc., pues suele darse un círculo vicioso entre una preparación insuficiente y una enseñanza inadecuada (Fernández,

Llopis y Pablo, 1991). El psicólogo puede jugar un importante papel en este ámbito despertando en los profesores la inquietud por mejorar su práctica docente, proporcionándoles información y formación sobre los distintos aspectos que afectan al proceso de enseñanza/aprendizaje a través de las reuniones con grupos de profesores o mediante asesoramiento individual, y animando y colaborando con el seminario de matemáticas para que se responsabilice de su propia formación e incluso de la formación matemática de aquellos profesores de otras asignaturas interesados en determinados contenidos matemáticos que les son útiles para enseñar ciertos conceptos de su área. Para esto resulta de gran utilidad la coordinación de la labor del psicólogo con las actividades de los centros de profesores y con los equipos de apoyo externo.

Tanto la formación inicial, como la formación permanente no deberían incidir solamente sobre los conocimientos de los profesores sino también sobre sus creencias y actitudes respecto a las matemáticas y a su enseñanza y sobre las habilidades necesarias para flexibilizar la enseñanza y adaptar los contenidos matemáticos a las peculiaridades de la clase de alumnos y sus necesidades especiales.

Creencias y actitudes de los profesores de matemáticas. Ambos aspectos, junto con los conocimientos teóricos y prácticos, ejercen una importante influencia sobre las prácticas educativas que el profesor lleva a cabo, sobre la selección de contenidos a los que pone mayor énfasis, etc. Ernest (1989) considera dentro de las creencias de los profesores aquellas relativas a los siguientes aspectos:

- *Acerca de la naturaleza de las matemáticas*: las concepciones que el profesor tenga sobre las matemáticas influyen en la práctica escolar porque, por ejemplo, un profesor que conciba a las matemáticas como una continua resolución de problemas estará más abierto a que los alumnos elaboren sus propios métodos y estrategias, a que construyan su propio conocimiento matemático.
- *Acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*: estas creencias también tienen su impacto sobre la forma en que se enseña la matemáticas en un contexto dado y sobre la implantación de una reforma educativa como la que vivimos en la actualidad.
- *Acerca de las finalidades de la educación*: estas creencias pueden influir sobre las decisiones que se tomen respecto a qué conceptos, procedimientos y actitudes se van a enseñar y qué gama de actividades se van a utilizar para ello.

Con respecto a las actitudes, Ernest (1989) distingue:

- *Actitudes hacia las matemáticas*: la filia o la fobia hacia dicha disciplina, así como a la confianza en las propias habilidades matemáticas.
- *Actitudes hacia la enseñanza de las matemáticas*: el grado de entusiasmo que en el profesor despierta su enseñanza y el grado de confianza sobre la propia capacidad para enseñarlas.

Ambos tipos de actitudes del profesor influyen en las actitudes de sus alumnos hacia las matemáticas y su

aprendizaje (Banks, 1964, Aikens, 1970, cits. en Quiles, 1993).

Las creencias y actitudes de los profesores influyen en su práctica educativa; sin embargo, hemos de ser precavidos y no considerar esta relación como una relación causa-efecto. Aún no se ha aclarado el mecanismo a través del cual las ideas de los profesores se traducen en prácticas educativas concretas y, por otro lado, en ocasiones se pueden encontrar diferencias entre las ideas que un profesor manifiesta y las que luego pueden inferirse a partir de su actuación concreta.

No quisieramos finalizar este apartado sin referirnos a las creencias y actitudes que los profesores de matemáticas tienen sobre cuál debe ser la función del psicólogo escolar y sobre cómo éste puede contribuir a mejorar la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. Si la intervención del psicólogo sobre los problemas de aprendizaje de las matemáticas tiene que orientarse a proponer adaptaciones curriculares y cambios organizativos y metodológicos (Marchesi, 1993), esta intervención puede encontrar serias dificultades cuando el profesor de matemáticas piense que el psicólogo debe limitarse a diagnosticar y tratar al alumno que «presenta el trastorno». El psicólogo deberá vencer también, mediante el adecuado ejercicio de su profesión, ciertas actitudes negativas que puedan manifestarse hacia la utilidad de su contribución.

Dificultades del aprendizaje de las matemáticas relacionadas con el currículum

Nos centraremos en las dificultades que aparecen relacionadas con el con-

tenido de la enseñanza, la metodología y la evaluación del aprendizaje, teniendo en cuenta que dichas dificultades pueden traducirse en «trastornos en los alumnos». Quisieramos aclarar y recordar de nuevo que estamos en plena reforma educativa, por tanto, es de esperar que muchos de los problemas que vamos a exponer se estén superando. Sin embargo, creemos que el peso de la tradición se dejará sentir aún en nuestras aulas y, a esas dificultades, habrá que añadir las derivadas de la desorientación que producen todas las reformas en sus inicios.

Dificultades atribuibles al contenido de la materia. Las matemáticas presentan una serie de características que de no ser tomadas en cuenta a la hora de abordar su enseñanza/aprendizaje pueden constituir serios obstáculos para el aprendizaje de los alumnos. Entre estas características se encuentran su naturaleza abstracta y jerarquizada y el lenguaje matemático.

- *La naturaleza abstracta de las matemáticas:* los contenidos matemáticos se suelen caracterizar por su autonomía de la experiencia concreta de los alumnos y esta separación se acentúa progresivamente a medida que se avanza en la escolaridad, con lo que los problemas que esta característica puede generar se van agravando con el paso de un curso a otro. El predominio de la lógica matemática sobre la psicología y los intereses del alumno (Quintana, 1980) puede propiciar una escasa o nula comprensión de los conceptos matemáticos por parte de éste, así como una falta de interés en su

aprendizaje. Incluso los esfuerzos que el profesor realiza para hacerse entender, utilizando metáforas y analogías, pueden conducir a una mayor confusión del alumno (Callejo, 1987), en caso de que el profesor no sea capaz de adoptar su perspectiva y comprender sus posibles dificultades. Cuando el énfasis recae en el aprendizaje de los contenidos simbólicos excesivamente abstractos y se ignora el aspecto semántico de los mismos, se impide, por un lado, que el alumno vincule su conocimiento informal con el formal que se imparte en el aula y de esta manera aprecie su significado (Gómez, 1991) y, por otro, que las matemáticas puedan relacionarse con otras asignaturas y así el alumno pueda valorar su aplicación práctica y extrapolar de manera adecuada las reglas matemáticas a otros contextos y situaciones. Para evitar las dificultades relacionadas con el carácter abstracto de la materia es necesario que el profesor conozca por qué se produce el proceso de abstracción en los alumnos y cómo favorecer el paso de lo concreto a lo abstracto y de lo simple a lo complejo.

- *La naturaleza jerárquica de las matemáticas:* en matemáticas los nuevos aprendizajes suelen estar basados en otros adquiridos previamente, de manera que la ausencia de una base sólida de conocimientos puede impedir u obstaculizar el progreso del alumno.

- *El lenguaje matemático:* presenta una serie de semejanzas y diferencias con el lenguaje ordinario que dificultan que el alumno lo utilice de

manera apropiada. Así, el lenguaje matemático se caracteriza frente al ordinario por su precisión a la hora de expresar los conceptos y por su inmunidad ante las expresiones personales y los juicios de valor; en el lenguaje matemático se emplean palabras y símbolos que se utilizan también en el lenguaje cotidiano aunque con diferente significado (por ejemplo, raíz, índice, etc.) (Macnab y Cummine, 1992); en el lenguaje ordinario se transmite el máximo de información disponible mientras que en el matemático esto no es lo que sucede habitualmente; por ejemplo, en el lenguaje cotidiano una expresión como $3+1 \geq 4$ no tiene sentido porque se sabe que $3+1=4$ (Callejo, 1987). Otra característica del lenguaje matemático que entraña especial dificultad para los alumnos se refiere al empleo de variables. El contexto en el que aparece la variable puede impedir que el alumno reconozca la noción de variabilidad, además, al indicarse las variables mediante notación alfabética, las dificultades pueden surgir del uso combinado de números y letras, del significado de las letras, del signo aparejado con una letra que puede coincidir o no con su valor real (por ejemplo, $-a = 3$, ya que $a = -3$), etc. Todos éstos problemas derivados del empleo de la notación formal que se utiliza en matemáticas se agravan cuando a los alumnos no se les hace razonar sobre la utilidad de las expresiones simbólicas y sobre su evolución a lo largo de la historia, de manera que puedan comprender que su uso obedece a ciertas exi-

gencias de comunicación y precisión y no a unas reglas caprichosas sin sentido para ellos. La importancia que tiene el uso correcto del lenguaje matemático se pone de manifiesto cuando se solicita al alumno una mediación verbal de la actividad que realiza y se observa que, cuanto más preciso es lenguaje que emplea, mejor resulta su ejecución y mayor capacidad demuestra para apreciar la calidad de su trabajo. De esta forma, *«escuchando a los alumnos, un profesor puede calibrar la calidad de su entendimiento»* (Macnab y Cummine, 1992, p. 114). El énfasis excesivo sobre los aspectos sintácticos del lenguaje matemático en detrimento de sus referentes contextuales puede hacer que este lenguaje deje de cumplir su función de herramienta psicológica al servicio del pensamiento matemático y se convierta en un obstáculo para el acceso a la cultura matemática. Otro aspecto de este tipo de lenguaje, mencionado más arriba, se relaciona con las dificultades que tienen los alumnos en su lectura. Los textos matemáticos escritos presentan, junto a las características ya citadas, una complejidad añadida porque en ellos la lectura no suele proceder de izquierda a derecha, sino que, debido al uso de ciertas expresiones (paréntesis, fracciones, índices, etc.), es necesario leerlos en todas direcciones (Callejo, 1987).

La metodología de enseñanza de las matemáticas. La metodología tradicional empleada en la enseñanza de las matemáticas se ha basado en la transmisión de la información por parte del profesor y

en la consideración de que el planteamiento deductivo es el único método de enseñanza.

La enseñanza tradicional de las matemáticas transcurre como sigue: el profesor explica un concepto y lo ilustra con algún ejemplo, a continuación propone a los alumnos que resuelvan algunos problemas para demostrar si lo han aprendido y, finalmente, los problemas son corregidos por el profesor quien indica el número de respuestas correctas, sin proceder a descubrir, junto con sus alumnos, vías de solución alternativas. Esta práctica fomenta el aprendizaje memorístico e impide el desarrollo de la creatividad por parte del alumno, descartándose así una de las formas de mejorar la opinión que éste tiene sobre la asignatura (Macnab y Cummine, 1992). El alumno se considera como un receptor pasivo, no se atiende a su ritmo ni a su estilo de aprendizaje y no se toma como punto de partida sus conocimientos previos. No aprovecha el recurso a los grupos cooperativos, ni a la discusión entre los alumnos, ni se aborda la transferencia de lo aprendido en la escuela a otros contextos.

Por otro lado, la presentación de los contenidos como un producto acabado no permite que el alumno llegue a ellos a través de habilidades de resolución de problemas, recorriendo el camino que la ciencia matemática anduvo hasta el desarrollo de tales conceptos. Esta presentación tampoco permite que se profundice progresivamente en los contenidos a medida que se avanza en el aprendizaje de las matemáticas y se vuelvan a retomar aspectos tratados con anterioridad. La presentación que el profesor realiza de determinados contenidos también puede

caracterizarse por su ausencia de orden y claridad, por transcurrir al margen de la comprensión de los alumnos y ser impermeable a las dudas que éstos manifiestan, por no acompañarse de los ejemplos e ilustraciones necesarios, por realizarse a una velocidad excesiva, etc.

A pesar de las críticas a la metodología de corte tradicional, no consideramos que exista una metodología más adecuada que el resto. El profesor debería contar más bien con el suficiente repertorio de métodos y con la suficiente flexibilidad de aplicación de los mismos como para poder utilizar, con cada grupo y en cada situación, una determinada metodología de trabajo.

En relación a los *recursos didácticos* utilizados en la enseñanza de las matemáticas, las dificultades de derivan del uso casi exclusivo del libro de texto, lo que contribuye a que se conciba las matemáticas como algo acabado a transmitir a los alumnos sin tener en cuenta las interacciones específicas que se establecen entre alumnos, profesores y materia. Además, hay que tener en cuenta que existen libros de texto que, por su construcción con frases y párrafos demasiado largos y complicados y por su pobreza de ejemplos y gráficos, contribuyen a la falta de motivación y desinterés de los alumnos hacia la asignatura. En cuanto al uso de nuevos recursos (ordenador, calculadora, prensa, etc.), los profesores parecen tener poca preparación para trabajar con ellos y crear otros nuevos para incrementar la motivación y el grado de comprensión de sus alumnos, para seleccionar actividades o situaciones en que su uso sea adecuado y para evaluar lo que sus alumnos aprenden con ellos.

La evaluación de los aprendizajes matemáticos. Las dificultades en relación a la evaluación en el área de las matemáticas son comunes a otras áreas de conocimiento y aparecen cuando se da una o varias de las situaciones siguientes:

- Se evalúa sólo en momentos puntuales, utilizando el examen escrito como instrumento predominante y empleando unas actividades muy distintas de las utilizadas durante la fase de aprendizaje.
- Se centra la evaluación exclusivamente en el alumno y no se considera como un medio de obtener información para mejorar la práctica docente a través del conocimiento de las razones del progreso, retroceso o estancamiento del aprendizaje del alumno.
- Los exámenes escritos son puntuados más que analizados, por tanto, se renuncia a la valoración del proceso de resolución y no se proporciona la oportunidad de autoevaluación y autocorrección (Cawley y Miller, 1986).
- La evaluación tiene carácter normativo, la ejecución del alumno se compara con la del alumno ideal, pero no con su propio progreso.
- Se evalúa sólo el conocimiento formal, no se valora otro tipo de conocimiento y se desprecian los factores motivacionales y afectivos.

Dificultades relacionadas con el contexto de enseñanza de las matemáticas

Muchas de las dificultades relacionadas con el contexto aparecen ya re-

cogidas en apartados anteriores, sin embargo, subrayaremos las más relevantes. El proceso de aprendizaje en la clase de matemáticas no se entiende en un contexto de interacciones sociales. Con frecuencia el profesor no consigue transmitir de forma clara su definición de la situación de aprendizaje o no existe una negociación entre las definiciones de alumnos y profesores, de manera que unos y otros perciben de modo distinto la finalidad de una misma actividad escolar (Edwards y Mercer, 1987, 1989). Este fracaso en el proceso de negociación de las definiciones compartidas de las situaciones de interacción se traduce con frecuencia en que los alumnos responden a su profesor de la manera que ellos creen que puede satisfacerle más y no tanto de acuerdo a los razonamientos matemáticos (Armendáriz, Azcárate y Deulofeu, 1993).

Una diferencia importante entre el contexto del aula y el contexto extraescolar radica en que en este último el alumno suele percibirse como controlador de sus propios problemas, es él quien ostenta la responsabilidad de identificar una situación como problemática y de seleccionar libremente las estrategias para resolverla; mientras que en el aula los problemas le vienen asignados y las estrategias le son más o menos impuestas (Gómez-Granell y Fraile, 1993; Gómez-Granell, 1994). Por otra parte, el contexto escolar sólo trabaja y evalúa el discurso formal si tener en cuenta otras formas de discurso que el alumno ha adquirido y utiliza en otros contextos (Gómez, 1991) y que le pueden servir de ayuda u obstáculo en su aprendizaje dentro del aula. La consideración de estas otras formas de discurso es esencial para vincular el

contenido formal que imparte la escuela con su utilidad práctica.

Se tiende a considerar que el aprendizaje es algo individual por lo que no se suele trabajar en equipo, ni potenciar la comunicación entre los alumnos. Además, los alumnos no tienen oportunidad de presenciar como los demás piensan en voz alta porque no se reconoce el valor educativo del susurrar en las aulas y del hablar con los compañeros. Esta infravaloración de la interacción social y del intercambio verbal entre los alumnos y entre los alumnos y el profesor impide que éste saque partido de las discusiones para profundizar en el razonamiento matemático de los alumnos y para diagnosticar sus dificultades, también dificulta que éstos desarrollen actitudes sanas hacia la asignatura puesto que un contexto carente de interacciones positivas es un contexto que el alumno percibe como un lugar donde acude no a aprender sino a ser juzgado (Kloosterman y Gorman, 1990) y donde el profesor representa una autoridad con poder exclusivo para corregir (Garofalo, 1989). Con todo ello se resiente el clima de clase, que constituye uno de los condicionantes más importantes del logro de los objetivos que debe plantearse la enseñanza de las matemáticas.

Procedimientos y técnicas de intervención en las dificultades de aprendizaje de las matemáticas

Tradicionalmente la intervención en éste y otros ámbitos del aprendizaje se dirigió a tratar de modificar los condicionantes, centrados exclusivamente en el alumno, que le impedían progresar adecuadamente en sus aprendizajes. En la

actualidad, al considerarse, por un lado, que las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas pueden originarse o acentuarse a partir del contexto escolar donde las matemáticas se enseñan y evalúan y, por otro lado, que no sólo es necesario tener en cuenta la necesidad educativa del alumno, sino también la respuesta que el sistema educativo le ofrece, se hace imprescindible un diseño de intervención más amplio que el centrado exclusivamente en el alumno. Por ello, hoy día, se puede observar cada vez más que la mayoría de las intervenciones se desarrollan en el propio aula y contando con el profesor como principal agente de cambio.

Como las *dificultades del alumno con las matemáticas* no suelen manifestarse de forma aislada, sino asociadas a un contexto poco propicio para su aprendizaje y al uso de una metodología de enseñanza poco adecuada, la mayoría de los procedimientos que se exponen a continuación, aunque procuren mejorar las actitudes y el rendimiento de los alumnos, intervienen también sobre el contexto de aprendizaje y sobre la dinámica de clase, lo cual supone intervenir sobre los conocimientos, creencias y actitudes de los profesores.

Estrategias para abordar las dificultades relacionadas con el profesor. Para prevenir y corregir estas dificultades, Brady (1991) propone que la formación inicial y permanente de los profesores se centre en la resolución de problemas educativos, para que adquieran sus recursos didácticos reflexionando sobre su aplicación a grupos concretos de alumnos. Con respecto a la formación permanente de los profesores, como ya se

mencionó más arriba, la función del psicólogo escolar debe consistir en animarles a probar nuevos métodos y a participar en equipos de trabajo para la experimentación y para la reflexión sobre la propia práctica, y en hacerles conscientes de que su eficacia está influida por los mismos factores que la eficacia de sus alumnos y que, por tanto, el logro de ambas debe ir en paralelo. Para esto puede servirse de las reuniones departamentales y de la creación de seminarios de formación. Estos pueden organizarse para abordar los problemas que surgen en el proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas (por ejemplo, la atención a los alumnos con necesidades educativas especiales), para diseñar la oportuna intervención (que con frecuencia adoptará la forma de adaptación curricular) y para evaluar y discutir los resultados obtenidos. En estos seminarios el papel del psicólogo escolar habrá de ser el de alguien que puede aportar sus conocimientos sobre psicología de la educación, contribuyendo a que los profesores conozcan mejor las capacidades de sus alumnos y los distintos factores que influyen en su aprendizaje, de manera que esta información les pueda servir de ayuda a la hora de planificar sus clases. Pero el psicólogo también deberá estar atento a las aportaciones de los demás, a las necesidades y demandas que surjan en dichas reuniones con objeto de mejorar su formación y de contribuir a buscar las respuestas más adecuadas a los nuevos problemas. Por otro lado, ha de ser consciente de y aprovechar la oportunidad que estos seminarios ofrecen para el cambio de las creencias y actitudes de los profesores con respecto a la enseñanza/

aprendizaje de las matemáticas y con respecto a la función del psicólogo. Para favorecer este cambio resulta crucial saber sacar partido de las discusiones que tienen lugar dentro del seminario y demostrar que los conocimientos y destrezas adquiridos se traducen en una mejora de la dinámica de la clase y en un incremento del rendimiento de los alumnos.

Estrategias para abordar las dificultades relacionadas con el currículum.

Como se expuso anteriormente en el apartado de las dificultades, el contenido matemático presenta una serie de características que pueden dificultar su enseñanza y su aprendizaje, y por tanto, profesores y psicólogos han de prestarles especial atención.

Un medio de superar o prevenir las dificultades que se derivan del carácter abstracto de las matemáticas consiste en que el alumno traduzca los mensajes verbales a otros códigos pues esto favorece la comprensión; así el realizar y comparar una representación gráfica y una figura analítica de un mismo enunciado facilita la presentación de relaciones abstractas a nivel concreto y la resolución de los problemas (Botsmanova, 1989).

Otra forma de corregir estas dificultades consiste en la previsión por parte del profesor de los posibles obstáculos que pueden tener los alumnos en el aprendizaje de un contenido matemático determinado. Debido a que el profesor de una clase da alumnos es quien mejor puede conocer sus capacidades y sus dificultades, es también quien mejor puede realizar este esfuerzo de ponerse en lugar del alumno, comprender sus limitaciones y, en consecuencia, adaptar la enseñanza y los contenidos. Esta activi-

dad se enriquece cuando son varios profesores los que ponen en común sus experiencias y puntos de vista y discuten entre sí el mejor modo de favorecer el proceso de abstracción en sus alumnos. Una de las formas de favorecer dicho proceso consiste en utilizar jerarquías de aprendizaje en forma de mapas conceptuales para ordenar y secuenciar la enseñanza de las matemáticas y para adaptar ésta a los alumnos y al contexto (Prieto, 1993). Así, se deben seleccionar los aprendizajes que se desea promover y ordenarlos según un criterio constructivo de menor a mayor generalidad y de menor a mayor abstracción. Asimismo se ha de vincular los conocimientos con la experiencia concreta del alumno planteando la enseñanza en distintos contextos significativos para él que favorezcan su implicación personal, su comprensión y el uso de las matemáticas para interpretarlos (Gómez, 1994).

Otra propuesta diferente para secuenciar los contenidos, que permite poner en relación los conocimientos conceptuales y procedimentales, consiste en la denominada *Instrucción Fundada Conceptualmente* (Hiebert y Wearne, 1988, cit. en Bermejo, 1993). Se desarrolla conforme a los siguientes pasos:

1. Se selecciona un contenido específico.
2. Se analiza qué procesos cognitivos son fundamentales para la ejecución exitosa en relación a ese contenido. Esto se hace a través del análisis de tareas y de la interpretación de los datos obtenidos mediante este análisis.
3. Se diseña la instrucción para el desarrollo de los procedimientos

cognitivos implicados en el contenido específico.

4. Se evalúa: a) si el rendimiento del alumno con respecto al contenido ha mejorado y b) si han mejorado los procesos cognitivos trabajados: observando cómo el alumno ejecuta otras tareas que implican los mismos procesos.

Una última posibilidad consiste en seleccionar el qué enseñar y el cómo hacerlo a partir del análisis de la competencia experta (Bermejo, 1993), pero en este caso hay que tener especial cuidado en que dicho análisis no nos aleje de los alumnos a los que se dirige la instrucción, es decir, de la contextualización de las estrategias de enseñanza.

Con estas propuestas se pretende, por un lado, favorecer el proceso de abstracción en los alumnos y, por otro lado, superar las dificultades que provienen de la naturaleza jerárquica de las matemáticas que obliga a asentar los nuevos aprendizajes en los adquiridos previamente. Para vencer este obstáculo es necesario que el profesor conozca cuál es el punto de partida de sus alumnos, ya sea a través de la información procedente del curso o ciclo anterior y/o mediante las actividades que él mismo diseñe para obtener esta información, y a partir de ella establezca la secuencia de aprendizaje que permita, inicialmente y según el caso, reforzar, repasar o adquirir los prerrequisitos necesarios para abordar los nuevos contenidos, evitando introducir nuevos conceptos o procedimientos hasta asegurarse de que pueden ser asimilados a los ya existentes. Asimismo puede resultar de gran utilidad abordar los contenidos matemáticos de

manera cíclica, haciendo coincidir secuencia lógica y secuencia psicológica, de forma que se avance progresivamente en el aprendizaje retomando y profundizando en los contenidos tratados con anterioridad, favoreciendo con ello el que los alumnos afiancen sus aprendizajes. A ello puede contribuir también la presentación de los contenidos recorriendo el camino que anduvo las matemáticas hasta su desarrollo, de manera que los alumnos puedan percibir la finalidad y la necesidad de lo que se les enseña.

Un modo de abordar las dificultades debidas al uso del lenguaje matemático consiste en explicitar las diferencias con el lenguaje ordinario para lo cual el área de matemáticas puede realizar un trabajo conjunto con el departamento de lengua. El profesor debe también evitar toda complejidad innecesaria del lenguaje matemático que no contribuya a mejorar el aprendizaje de los alumnos sino a oscurecer su comprensión. En ocasiones puede resultar necesario recordar porqué surgen y a qué se aplican las reglas de la notación formal para ello se puede recurrir de nuevo a la historia de las matemáticas. Con respecto a las dificultades que entraña la lectura de textos matemáticos, se pueden realizar comentarios de dichos textos, *...para lo cual, previamente, hay que leer despacio, releer y buscar la interrelación entre los conceptos expresados en el texto; aprender el significado matemático de las palabras del vocabulario matemático extraídas del lenguaje ordinario, así como el de las palabras propiamente matemáticas, el de los símbolos y las abreviaturas. Y por último ajustar el movimiento de los ojos al desarrollo del texto ya que el*

lenguaje matemático no es lineal... (Callejo, 1987, p. 63). A todo esto se puede añadir, tal como se mencionó más arriba, la realización de una representación gráfica y/o analítica del texto.

Las dificultades relacionadas con la *metodología* de la enseñanza de las matemáticas se basan fundamentalmente en el uso casi exclusivo de un tipo de recurso docente sin que haya una adaptación del mismo al grupo de alumnos, al contenido y a los objetivos que se persiguen. Para paliar esta situación es necesario que los profesores cuenten con un amplio repertorio de métodos pero, a su vez, es preciso que conozcan cómo, cuándo y porqué usarlos, es decir, cómo gestionarlos con flexibilidad. A ello puede contribuir los seminarios de formación mencionados más arriba, en el seno de los cuales se puede debatir y diseñar distintos métodos en función de los usos a los que se destinan y reflexionar sobre su utilidad práctica. El psicólogo podrá intervenir asesorando y apoyando la toma de decisiones de los profesores con respecto a la metodología. Teniendo en cuenta que la clave de una metodología adecuada radica en la reflexión sobre la propia práctica docente, exponemos a continuación una serie de métodos propuestos por De Corte (1993) para que el profesor los incluya en su repertorio y los utilice de manera oportuna para ayudar a los alumnos. Estos métodos son: el modelado, el adiestramiento, el andamiaje, la articulación, la reflexión, la exploración y la generalización.

Modelado. Se trata de que el alumno observe a un experto (profesor u otro alumno) realizando una actividad de manera que pueda asimilar el proceso de

resolución seguido. Un ejemplo de modelado lo presenta el profesor que resuelve en voz alta un problema discutiendo con sus alumnos las distintas fases y los distintos aspectos a los que hay que prestar atención para evitar posibles errores (Cardelle-Elawar, 1992a).

Adiestramiento. El profesor observa el punto de partida del alumno cuando ejecuta una tarea y, a partir de aquí, le va proporcionando las pistas y la retroalimentación necesaria para que mejore su ejecución, o una vez que el alumno ha cometido algún error aprovecha la equivocación para enseñar o reforzar conceptos o procedimientos matemáticos (Prieto, 1993). En este último caso es preciso que el profesor muestre una actitud positiva hacia los errores de sus alumnos, considerándolos como un aspecto más del aprendizaje de gran utilidad para el alumno y para él mismo, ya que los errores de los alumnos deben constituir nuevos desafíos para el profesor y no una señal de su fracaso como docente.

Andamiaje. Se trata de que el profesor se mueva en la zona de desarrollo próximo de sus alumnos, permitiendo que éstos construyan su conocimiento matemático movidos por una progresiva exigencia por parte del profesor que, a la vez, debe proporcionar la ayuda necesaria para que las nuevas demandas se vayan alcanzando. Así, el profesor actúa de guía del aprendizaje de sus alumnos quienes, a través de las preguntas y problemas que aquél les plantea, van descubriendo nuevos conceptos y métodos (Brady, 1991). Tanto en el caso del adiestramiento como en el andamiaje es fundamental que el profesor conozca el nivel de desarrollo real y potencial del

alumno, para ello es necesario diseñar actividades de evaluación apropiadas, para lo cual la colaboración del psicólogo puede ser de gran utilidad.

Articulación. Consiste en ayudar a que el alumno identifique y haga explícito su conocimiento y sus procedimientos de resolución de problemas, con ello se favorece su capacidad para transferirlos a otros contextos (Cardelle-Elawar, 1992b). Un modo de lograrlo es a través del fomento del lenguaje hacia uno mismo como instrumento para la regulación de las propias acciones; para ello el profesor deberá proporcionar un clima de clase que favorezca las autocomunicaciones, convencer a sus alumnos de su utilidad y enseñar los distintos usos que tienen en el aprendizaje de las matemáticas («mientras escucho/leo las instrucciones, mientras planifico mi trabajo matemático, mientras realizo la tarea, mientras repaso mi trabajo») (Manning, 1984).

Reflexión. Consiste en promover en los alumnos una constante comparación entre sus estrategias y procedimientos de solución y los de los expertos (profesor o alumnos). Normalmente la reflexión, la articulación y el modelado aparecen juntas. Una forma de poner en práctica esta metodología consiste en: los alumnos individualmente resuelven problemas poniendo por escrito el proceso seguido y las dificultades halladas, posteriormente comentan lo que han realizado con el compañero más próximo y, finalmente, toda la clase discute las estrategias usadas, las planificaciones seguidas, los obstáculos encontrados, etc. El profesor destaca los acuerdos y los desacuerdos entre los alumnos, aprovecha la discusión para introducir/reforzar

conceptos y procedimientos matemáticos, así como para detectar las dificultades y evaluar el progreso de sus alumnos. Finalmente, profesores y alumnos realizan una síntesis de la discusión mantenida destacando los logros conseguidos.

Exploración. Este método persigue que el alumno sea un aprendiz autónomo. Para ello se sirve de las actividades de descubrimiento, investigación y planteamiento de problemas (Brady, 1991). En un trabajo de descubrimiento o exploración los alumnos se enfrentan con problemas que no pueden resolver inmediatamente. Se requiere, entonces que realicen tareas como buscar patrones o modelos, plantear y verificar hipótesis, etc. Así ocurre cuando a la clase entera, provista de calculadoras, se le propone el siguiente problema «he multiplicado dos números en la calculadora y me ha salido el 5, pero no me acuerdo qué números he puesto, ¿podéis ayudarme sabiendo que uno de ellos era el 7?» (Juan y Orero, 1990). En la investigación los alumnos identifican variables, determinan cuáles son las más significativas, recogen datos, extraen conclusiones,... El uso de los ordenadores facilita esta metodología. Así, los alumnos pueden escribir ecuaciones o modificar los parámetros de una ecuación con el objetivo de que su representación gráfica consiga atravesar una serie de puntos distribuidos por la pantalla (Martí, 1991). Con el planteamiento de problemas se pretende que las actividades matemáticas sugieran a los alumnos nuevos problemas y nuevas cuestiones. Para ello se les puede pedir que, a partir de lo que ya conocen, propongan problemas a sus compañeros para más tarde debatir en-

tre todos la calidad del problema y las distintas vías de solución planteadas.

Generalización. Consiste en mostrar cómo los conocimientos y estrategias cognitivas que adquirimos en un ámbito nos son útiles en otros ámbitos. Se trata de que los alumnos tengan la oportunidad de aplicar sus conocimientos a distintas situaciones haciéndoles ver que los distintos contextos pueden tener en común el mismo procedimiento matemático a pesar de las diferencias superficiales, es decir, centrando su atención sobre los aspectos relevantes de una situación. A esto puede contribuir el trabajo conjunto de los profesores de matemáticas con los de otras áreas (por ejemplo, geografía, ciencias naturales, etc.) en las que pueden requerirse ciertas nociones matemáticas. Este trabajo resulta útil por dos razones: por un lado, favorece la descontextualización de los conocimientos matemáticos y las actitudes hacia el área al percibirse ésta como una herramienta útil para otros aprendizajes. Y, por otro lado, se previene el conflicto que puede surgir entre los conocimientos que el alumno adquiere en la clase de matemáticas y los conocimientos matemáticos que utilizan los profesores de las demás disciplinas. La generalización también significa integrar las distintas partes de las matemáticas (aritmética, álgebra, geometría,...) en torno a situaciones problemáticas de manera que el alumno observe que existen relaciones entre ellas y que los conocimientos que adquiere en cada una pueden servir para comprender mejor los que adquiere en las otras áreas matemáticas.

A estas propuestas de De Corte (1993) se pueden añadir las recomendaciones siguientes:

1. Para favorecer el aprendizaje autónomo de los alumnos el profesor debe mostrar cómo se realizan las autocorrecciones (Macnab y Cummine, 1992) y fomentar el empleo de métodos alternativos para verificar los resultados a los que los alumnos llegan. Otra forma de mejorar los procesos de autocontrol del alumno consiste en enseñarle a realizar estimaciones de los problemas que resuelve para compararlas con los resultados que obtiene y, de esta forma, modificar o no el proceso de resolución seguido. Además puede resultar necesario subrayar la importancia de interpretar las respuestas que da el alumno a la luz del enunciado que las motivó de manera que perciba la imposibilidad de obtener, por ejemplo, que la altura de un trampolín es de 5'428 metros.
2. Para motivar al alumno hacia el aprendizaje de nuevos conceptos y procedimientos se puede poner de manifiesto la necesidad que propició su creación. Esto puede realizarse utilizando lecturas de historia de las matemáticas que luego se comentan entre todos (AA.VV., 1990), o haciendo escenificaciones de las mismas, de manera que el alumno comprenda que su enseñanza obedece a una razones lógicas y no a un capricho de su profesor.
3. Para el empleo y creación de recursos materiales que repercutan en el rendimiento y la motivación de los alumnos y profesores se podría crear, entre centros similares, un banco de recursos que,

con las oportunas adaptaciones a las peculiaridades de cada aula, permitiera aplicar materiales variados a la enseñanza de las matemáticas. Esto exige, por parte de los profesores, una actitud positiva hacia el intercambio de experiencias con otros colegas y exige la disponibilidad de unos criterios para evaluar la eficacia de los recursos y lo que los alumnos aprenden con ellos. Estas dos exigencias habrán de ser nuevos desafíos a abordar en las reuniones departamentales y en los seminarios de formación.

La superación y prevención de las dificultades relacionadas con la *evaluación* pasa por el diseño de instrumentos que permitan a alumnos y profesores concebirla como un proceso integrado en el proceso global de enseñanza/aprendizaje, es decir, requiere el diseño de actividades de aprendizaje que a su vez sirvan para valorar los conocimientos, procedimientos y actitudes del alumno. Por otro lado, se precisa un cambio de creencias y actitudes, por parte de profesores, alumnos y padres, respecto a la finalidad de la evaluación: ésta debe despojarse de su carácter sancionador y adoptar un carácter formativo y procesual. El carácter formativo de la evaluación se pone de manifiesto cuando el profesor realiza una valoración constante del progreso del alumno respecto a unos objetivos previamente establecidos, lo que le sirve a este último para tomar conciencia de su propio proceso de aprendizaje. Esto es así cuando el alumno recibe explicaciones sobre los resultados de su trabajo que le

proporcionan una orientación clara para la autocorrección.

Para el profesor, la evaluación también tiene una vertiente formativa en cuanto le permite obtener información sobre la adecuación de los contenidos y la metodología de enseñanza a la finalidad educativa de los objetivos y, por ende, a las necesidades educativas de los alumnos. El proceso evaluador debe comenzar con un informe del alumno realizado por el profesor de matemáticas del curso o ciclo anterior, este informe habrá de contrastarse con las observaciones iniciales que, sobre los conocimientos previos y las actitudes matemáticas de sus alumnos, lleve a cabo el profesor actual. Para ello pueden ser de gran utilidad las discusiones que se mantengan en la clase en torno a situaciones problemáticas. Con la información obtenida, el profesor planifica y ajusta la enseñanza a las necesidades de sus alumnos, lo que le obliga a una constante observación y valoración de sus aprendizajes (¿qué comprenden?, ¿dónde encuentran las dificultades?, ¿cómo las superan?, etc.) a través de la evaluación del trabajo que realizan en el aula, el cuaderno de clase, las pruebas diseñadas para tal fin, las exposiciones orales, los debates, los trabajos prácticos, etc. Al final del curso, el profesor debe realizar un informe cualitativo y, a poder ser, compartido por un equipo de profesores, sobre el aprendizaje de sus alumnos en el que se expliciten los puntos fuertes y débiles del alumno junto con las estrategias de mejora sugeridas. Dicho informe sirve para dar continuidad al aprendizaje de un curso a otro y de un ciclo al siguiente.

La contribución del psicólogo a la evaluación del proceso de enseñanza/

aprendizaje consiste en el asesoramiento al profesorado en su reflexión sobre los objetivos de la evaluación, los instrumentos de evaluación y su adaptación a lo que se quiere valorar (conocimientos, procedimientos y actitudes del alumno; contenidos, metodología, actitudes, etc. del profesor), los criterios de evaluación, los dispositivos de recuperación, etc. Además debe colaborar para dinamizar las sesiones de evaluación de manera que éstas se conviertan en una oportunidad de debatir y analizar el proceso de evaluación y la adecuación de los instrumentos y contenidos de evaluación al carácter formativo que debe tener la misma. La contribución del psicólogo debe ser también importante a la hora de comunicar a los padres los resultados del proceso evaluador de sus hijos, para facilitarles la comprensión de determinados conceptos (evaluación de actitudes, evaluación continua, etc.) y, en consecuencia, favorecer su colaboración en el proceso de enseñanza/aprendizaje de los alumnos.

Estrategias para abordar las dificultades relacionadas con las creencias y actitudes del alumno y con el clima de clase. En el apartado dedicado a las dificultades de aprendizaje de las matemáticas manifestadas por el alumno se expusieron cuatro dimensiones, en las que podían presentarse dichas dificultades (recursos, heurísticos, procesos de autorregulación, creencias y actitudes). Los procedimientos y técnicas de intervención propuestos hasta el momento tienen por objeto paliarlas y prevenirlas, sin embargo, dado que cada vez se reconoce más la importancia que para el aprendizaje de las matemáticas tienen las

creencias y las actitudes de los alumnos, y teniendo en cuenta que el clima de clase y el contexto escolar constituyen una de las fuentes principales de origen de tales creencias y actitudes, nos parece oportuno finalizar este apartado dedicado a los procedimientos y técnicas de intervención aludiendo a una serie de directrices que distintos autores proponen para incrementar la motivación de los alumnos hacia las matemáticas y para favorecer un clima de clase más gratificante que permita desarrollar en alumnos y profesores unas creencias y unas actitudes positivas hacia su enseñanza y aprendizaje. Así se recomienda que:

1. El profesor, a través de su actuación y sus verbalizaciones, transmita su confianza en la capacidad de sus alumnos para aprender matemáticas (Kloosterman y Gorman, 1990).
2. Se alabe y refuerce el esfuerzo y la ejecución sólo cuando los alumnos lo merezcan pues el halago injustificado hace disminuir la motivación (Kloosterman y Gorman, 1990).
3. Se atraiga el interés de los alumnos hacia el contenido del tema o hacia la tarea a realizar, presentándola como un reto o desafío con cierto grado de novedad (Prieto, 1993).
4. Se explicita la utilidad de las matemáticas poniendo en relación el contenido matemático con las experiencias y conocimientos previos de los alumnos o por medio de ejemplos que reflejen sus aplicaciones (Kloosterman y Gorman, 1990), incluyendo pro-

blemas reales que favorezcan, a su vez, la generalización de los conocimientos.

5. Se comunique a los alumnos la dificultad de la tarea a realizar y el grado de esfuerzo que exige (Kloosterman y Gorman, 1990), porque el alumno tiende a experimentar una gran satisfacción cuando es capaz de resolver un problema desafiante y, en caso de fracaso, ante una tarea difícil que demanda una gran cantidad de esfuerzo, el alumno podrá reconocer que el error no es resultado de su falta de competencia y esta atribución le permitirá intentarlo de nuevo.
6. Los alumnos trabajen las matemáticas en grupos de manera cooperativa, discutiendo entre ellos los procedimientos y estrategias que siguen para resolver problemas y comentando las soluciones a las que llegan (De Corte, 1993, Prieto, 1993).
7. Cuando sea posible, se ofrezca al alumno distintas posibilidades a la hora de realizar una tarea con objeto de que el alumno se sienta autónomo (Alonso Tapia, 1991) y con cierto control sobre su propio proceso de aprendizaje.
8. La evaluación, como se defendió más arriba, sea continua y transmita al alumno el mensaje de que dicha evaluación no es más que otro paso en su aprendizaje que le va a permitir conocer qué es lo que ya sabe y qué es lo que aún necesita dominar, evitándose considerar a los errores como un fracaso sino como algo de lo que

se puede aprender siempre que orientemos nuestra atención al proceso seguido y no al resultado del mismo (Alonso Tapia, 1991).

9. Se enfatice la importancia de mejorar en relación a uno mismo más que ser mejor que los demás (Kloosterman y Gorman, 1991) y de aprender, aunque sea a través de los errores cometidos, frente a asegurarse el éxito realizando tareas rutinarias que no suponen ningún desafío ni ningún nuevo aprendizaje.
10. Cuando los alumnos realicen mal un problema, se les anime a intentarlo de nuevo, no permitiendo que den vueltas a su fracaso (Kloosterman y Gorman, 1991).
11. Se emplee mayor variedad de recursos didácticos que permitan mejorar la comprensión de los alumnos y atraer su atención e interés hacia el contenido de la enseñanza.
12. El profesor fomente en sus alumnos la concepción de la inteligencia como algo modificable (Alonso Tapia, 1991). La concepción que el alumno tiene sobre su propia capacidad influye en su actuación en una situación de aprendizaje o de resolución de problemas (De Corte, 1993; Prieto, 1993), así la consideración de la inteligencia como un conjunto de habilidades que puede ser ampliado y mejorado mediante el aprendizaje y el esfuerzo suele traducirse en una mayor motivación del alumno a la hora de aprender; de lo contrario, cuando se considera la inteligencia como

algo inmodificable, el alumno se orienta hacia el logro de resultados correctos más que hacia el aprendizaje.

13. Se valore el conocimiento informal del alumno y el uso de procedimientos y estrategias personales para adaptar la enseñanza a sus conocimientos previos (Gómez-Granell, 1994) y facilitar la traducción de los procedimientos informales al simbolismo matemático.

Recursos y materiales didácticos en la enseñanza de las matemáticas

Otra oportunidad para la intervención del psicólogo en el área de las matemáticas consiste en la facilitación al profesorado de recursos instrumentales necesarios para la presentación de los contenidos, para la adquisición de conocimientos y procedimientos por parte de los alumnos, para el refuerzo de los aprendizajes y para su evaluación. El psicólogo puede actuar asesorando y contribuyendo a:

1. Adaptar los recursos a las características del aula, su contexto socio-cultural y los objetivos que se pretenden alcanzar con ellos.
2. Evaluar las condiciones de uso de los materiales, seleccionando las tareas y situaciones de aplicación adecuadas.
3. La formación de los profesores para trabajar con ellos y sacarles el máximo partido.

En la actualidad, se hace mucho hincapié en el uso de las nuevas tecnologías (ordenador, video, calculadora,...)

para la enseñanza de las matemáticas ya que se considera que estos instrumentos permiten ahorrar esfuerzos y desarrollar nuevas estrategias de razonamiento.

Así el uso del *ordenador* en el aprendizaje de las matemáticas permite representar y transformar las informaciones de manera dinámica, permite a su vez que el alumno ponga en relación su conocimiento declarativo y procedimental, facilita la traducción de la información de un código a otro, traducción que favorece el aprendizaje matemático y las habilidades metacognitivas del alumno, al tomar éste conciencia de que de cada medio simbólico puede obtener informaciones distintas del mismo contenido y al tener conocimiento del grado de consecución de los objetivos propuestos, gracias a la visualización del resultado de sus acciones que le ofrece la pantalla del ordenador (Martí, 1991). Otros de los beneficios de la tecnología informática puesta al servicio de la enseñanza radica en la posibilidad de diseñar actividades muy motivadoras para los alumnos y la oportunidad que ofrece para la simulación de situaciones de aprendizaje que de otro modo resultarían difíciles de reproducir en el aula. Además, aquellos programas que registran las respuestas y el proceso de solución del alumno pueden servir al profesor para su evaluación formativa y el diagnóstico de dificultades de aprendizaje, sobre todo cuando se utiliza para discutir con el alumno el proceso seguido (Callejo, 1987).

En cuanto al uso de la *calculadora*, Howson y Wilson (1991) enumeran una serie de beneficios que conlleva su llegada al aula, entre los que citan están: el ser un instrumento útil para la transmisión de conceptos matemáticos, permitir

el acercamiento a situaciones reales, pues con la calculadora se pueden realizar operaciones tanto con números grandes como muy pequeños, facilitar a los alumnos el verificar y descubrir propiedades de los números y desarrollar en ellos destrezas de estimación así como actitudes positivas hacia el cálculo. La utilización de la calculadora en la enseñanza es recomendable siempre que la actividad de aprendizaje no tenga por objeto la ejercitación del cálculo (Callejo, 1987), sin embargo, de entre los diversos usos que admite, el más interesante es el de usarla como fuente de problemas y como fuente de investigaciones en el aula (Juan y Orero, 1990).

Pero no es necesario recurrir a materiales muy sofisticados para enseñar/intervenir en el área de las matemáticas, buena muestra de ello la proporciona el uso de los *juegos recreativos* (por ejemplo, el parchís). Éstos permiten partir de los conocimientos de matemáticas informales que los alumnos poseen para pasar progresivamente a las matemáticas formales exigidas en la escuela, con esto se consigue una actitud más favorable hacia la asignatura así como despertar el interés hacia la misma (González, 1989; Álvarez, 1989; Cobalán y Gairín, 1988; Callejo, 1988; Bassedas, 1991).

Los *juegos matemáticos* pueden tener distintos objetivos y así se podrán aplicar en distintos momentos: al principio de un bloque de contenidos para introducir un tema; dentro del desarrollo de un bloque temático para aplicar o ampliar los contenidos; o al final, para marcar un cambio de fases. En cualquiera de los casos deben cumplir unos requisitos mínimos, como son: aplicarse en función de las necesidades de los alumnos, apli-

carse en el momento oportuno y a todos los alumnos, permitir la reflexión y ayudar al aprendizaje.

Un recurso mucho menos utilizado en la enseñanza de las matemáticas consiste en la aplicación de los conocimientos matemáticos para comprender mejor la información aparecida en los *medios de comunicación*. Rico y Fernández (1987) proponen un listado de los aspectos matemáticos que con frecuencia aparecen en la prensa escrita, como mapas y planos (proporciones y escalas), lotería primitiva (estadística, combinatoria), publicidad de vehículos (capacidad, longitud, velocidad),... todo ello se puede aprovechar en la enseñanza de las matemáticas para motivar, desarrollar y aplicar determinados conceptos y procedimientos.

Otro tipo de material susceptible de ser utilizado en la enseñanza de las matemáticas consiste en aprovechar las *experiencias extraescolares*. Así por ejemplo, Gutiérrez y Pintado (1990) se sirven de una jornada laboral en el campo para aplicar y comprender mejor los conocimientos y procedimientos matemáticos.

Estos dos últimos recursos muestran como en el ámbito de las matemáticas el campo de los recursos y materiales está abierto a la creatividad de todos aquellos preocupados por la enseñanza de las matemáticas y que pretenden tanto motivar a los alumnos hacia la disciplina, como posibilitar una mejor comprensión de la misma.

Conclusión

Aunque el avance de la intervención del psicólogo en este ámbito ha sido

espectacular y muy bien acogida por los profesores de matemáticas, aún quedan importantes lagunas que cubrir, a las que habrá que dar respuesta desde la psicología académica si no queremos que los progresos se estanquen. Nos referimos a la necesidad de mayor investigación sobre qué actividades de enseñanza/aprendizaje deben poner los profesores en práctica para fomentar la construcción del conocimiento matemático y superar las dificultades de aprendizaje de los alumnos y, también, a cómo conseguir que los profesores adquieran nuevas destrezas y nuevos conocimientos que faciliten y hagan más atractiva y fructífera su tarea docente.

Referencias

- ALONSO TAPIA, J. (1991). *Motivación y aprendizaje en el aula: cómo enseñar a pensar*. Madrid: Aula XXI/Santillana.
- ÁLVAREZ F. (1989). Jugando con los números. Operaciones divertidas. *Cuadernos de Pedagogía*, 166, 12-15.
- ARMENDÁRIZ, M.V.G.; AZCÁRATE, C. y DEULOFEU, J. (1993). Didáctica de las matemáticas y Psicología. *Infancia y Aprendizaje*, 62-63, 77-99.
- AA.VV. (1990). Disfrutar ¡al fin! en la clase de matemáticas. *Cuadernos de Pedagogía*, 180, 58-65.
- BAROODY, A.J. (1988). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: Visor.
- BASSEDAS, E. (1991). Utilizar el cálculo en la escuela: la programación de una situación significativa. *Comunicación, Lenguaje y Educación*, 11-12, 87-94.
- BERMEJO, V. (1993). Perspectivas innovadoras en la enseñanza-aprendiza-

- je de las matemáticas. Investigación cognitiva y práctica educativa. En: J.A. Beltrán, V. Bermejo, M.D. Prieto y D. Vence (Comps.). *Intervención psicopedagógica*, 169-185. Madrid: Pirámide.
- BOTSMANOVA, E. (1989). El papel del análisis gráfico en la resolución de problemas aritméticos. *Comunicación, Lenguaje y Educación*, 3-4, 17-21.
- BRADY, R.R. (1991). A close look at student problem solving and the teaching of mathematics: Predicaments and possibilities. *School Science and Mathematics*, 91(4), 144-151.
- CALLEJO, M.L. (1987). *La enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Narcea.
- CALLEJO, M.L. (1988). Un club matemático. *Cuadernos de Pedagogía*, 159, 50-52.
- CARDELLE-ELAWAR, M. (1992 a). *The selfregulate learning in solving mathematics problems*, European Conference on Educational Research. University of Twente Enschede-The Netherlands.
- CARDELLE-ELAWAR, M. (1992 b). Effects of teaching metacognitive skills to student with low mathematics ability. *Teaching & Teacher Education*, 8(2), 109-121.
- CAWLEY, J.F. y MILLER, J.H. (1986). Selected views on metacognition, arithmetic problem solving and learning disabilities. *Learning Disabilities Focus*, 2(1), 36-48.
- CORBALÁN, F. y GAIRÍN, J.M. (1988). Juegos en clase de matemáticas. *Cuadernos de Pedagogía*, 160, 50-51.
- DE CORTE, E. (1993). La mejora de las habilidades de resolución de problemas matemáticos: hacia un modelo de intervención basado en la investigación. En J.A. Beltrán, V. Bermejo, M.D. Prieto y D. Vence (Comps.). *Intervención psicopedagógica*, 145-168. Madrid: Pirámide.
- EDWARDS, D. y MERCER, N. (1987). *Common knowledge: The development of understanding in the classroom*. Londres: Methuen.
- EDWARDS, D. y MERCER, N. (1989). Reconstructing context: the conventionalization of classroom knowledge. *Discourse Processes*, 12, 91-104.
- ERNEST, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of mathematics teacher: A model. *Journal of Education for Teaching*, 15(1), 13-33.
- FERNÁNDEZ, F.; LLOPIS, A.M. y PABLO, C. (1993). *Matemáticas básicas: dificultades de aprendizaje y recuperación*. Madrid: Aula XXI/Santillana.
- GAGNÉ, E.D. (1991). *La psicología cognitiva del aprendizaje escolar*. Madrid: Visor.
- GAROFALO, J. (1989). Beliefs, responses and mathematics education: Observations from the back of the classroom. *School Science and Mathematics*, 89(6), 451-455.
- GÓMEZ, C. (1991). Cognición, contexto y enseñanza de las matemáticas. *Comunicación, Lenguaje y Educación*, 11-12, 11-26.
- GÓMEZ-GRANELL, C. (1994). Las matemáticas en primera persona. *Cuadernos de Pedagogía*, 221, 17-18.
- GÓMEZ-GRANELL, C. y FRAILE, J. (1993). Psicología y didáctica de las matemáticas. *Infancia y Aprendizaje*, 62-63, 101-113.
- GONZÁLEZ, P.M. (1989). Taller de matemáticas recreativa. *Cuadernos de Pedagogía*, 166, 65-66.

- GUTIÉRREZ, J. y PINTADO, B. (1990). Matemáticas en el campo. *Cuadernos de Pedagogía*, 187, 53-55.
- HOWSON, G. y WILSON, B. (1991). La enseñanza de contenidos específicos en matemáticas. *Comunicación, Lenguaje y Educación*, 11-12, 121-137.
- JUAN, V.C. y ORERO, J.C. (1990). Calculadoras. *Cuadernos de Pedagogía*, 182, 33-35.
- KLOOSTERMAN, P. y GORMAN, J. (1990). Building motivation in the elementary mathematics classroom. *School Science and Mathematics*, 90(5), 375-382.
- LLORENTE, P. (1982). La formación del profesorado. *Cuadernos de Pedagogía*, 88, 12-14.
- MACNAB, D.S. y CUMMINE, J.A. (1992). *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16: Un enfoque centrado en la dificultad*. Madrid: Visor.
- MANNING, B. (1984). A self communication structure for learning mathematics. *School Science and Mathematics*, 84(1), 43-51.
- MARCHESI, A. (1993). Intervención psicopedagógica en la escuela. En J.A. Beltrán, V. Bermejo, M.D. Prieto y D. Vence (Comps.). *Intervención psicopedagógica*, 145-168. Madrid: Pirámide.
- MARTÍ, E. (1991). Aprender matemáticas con ordenadores. *Comunicación, Lenguaje y Educación*, 11-12, 63-76.
- MARTÍNEZ, J.M. y PARADÍS, J. (1982). El aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Pedagogía*, 88, 4-8.
- MAYER, R.E. (1991). *Thinking, problem solving and cognition*. Nueva York: Freeman.
- PRIETO, M.D. (1993). La enseñanza de las matemáticas como solución de problemas. En J.A. Beltrán, V. Bermejo, M.D. Prieto y D. Vence (Comps.). *Intervención psicopedagógica*, 186-208. Madrid: Pirámide.
- QUILES, M.N. (1993). Actitudes matemáticas y rendimiento escolar. *Comunicación, Lenguaje y Educación*, 18, 115-125.
- QUINTANA, J.M. (1980). ¿Matemática moderna en E.G.B.? *Cuadernos de Pedagogía*, 64, 8-11.
- RICO, L. y FERNÁNDEZ, A. (1987). Prensa y matemáticas. *Cuadernos de Pedagogía*, 145, 56-60.
- RIVIERE, A. (1990). Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: Una perspectiva cognitiva. En A. Marchesi, C. Coll y J. Palacios (Eds.), *Desarrollo psicológico y educación*, III, 155-182. Madrid: Alianza Editorial.